# CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

## Tema 3

## Ecuaciones de Maxwell

**P1.-** En una región totalmente vacía hay un campo eléctrico $\vec{E} = kt \cdot \hat{u}_z$ y otro magnético con $B_y = B_z = 0$. La magnitud $k$ es constante. Calcular $\vec{B}$.

**Sol.:** $B_x = -\varepsilon_0 \mu_0 k \cdot y + k'$

**P2.-** En una región del espacio ocurre que: $J_z = 0$, $E_x = E_y = 0$, $E_z = ey + e't$, $B_x = by + b't$, $B_y = B_z = 0$, donde $e'$ y $b'$ son constantes conocidas. Calcular $\rho_v$, $e$, $b$ y $\vec{J}$.

**Sol.:** $\rho_v = 0$ $\quad e = b'$ $\quad b = -\varepsilon_0 \mu_0 e'$ $\quad J_x = J_y = 0$

**P3.-** En una región del espacio no hay ni cargas ni corrientes. El campo magnético es $\vec{B} = (ax - bt)\hat{u}_z$. El campo $\vec{E}$ tiene la dirección del eje *OY*.

**(a)** Calcular $\vec{E}$.

**(b)** Calcular la *fem* a lo largo de un cuadrado de lado *L*, con dos de sus lados situados respectivamente sobre los semiejes *OX* y *OY* positivos.

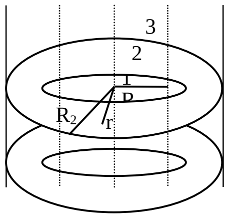
**Sol.: (a)** $\vec{E} = \left( bx - \dfrac{a}{\varepsilon_0 \mu_0} t + k \right) \hat{u}_y$

**(b)** $fem = bL^2$

**P4.-** En las regiones cilíndricas de la figura hay un campo magnético que tiene la forma $\vec{B} = \cos(10t)\hat{u}_z$ para $0 \le r \le R_1$, $\vec{B} = 8\times10^{-3} t \cdot \hat{u}_z$ para $R_1 \le r \le R_2$ y $\vec{B} = 0$ para $r > R_2$. Calcular:

**(a)** El campo eléctrico $\vec{E}$ en las zonas 1, 2 y 3.

**(b)** Los instantes de tiempo en los que dicho campo se anula en la región 3, en el caso particular de que $R_1 = 1m$ y $R_2 = 2m$.




**Sol.:** **(a)** Zona 1: $E = 5r \cdot \sin(10t)$

Zona 2: $E = \dfrac{5R_1^2}{r}\sin(10t) - \dfrac{0{,}004}{r}\left(r^2 - R^2\right)$

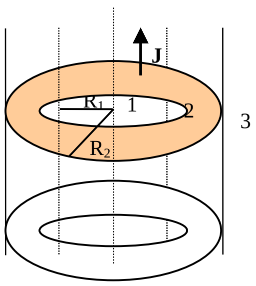
Zona 3: $E = \dfrac{5R_1^2}{r}\sin(10t) - \dfrac{0{,}004}{r}\left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)$

**(b)** $t = 2{,}4\times10^{-4}$ **s;** $0{,}31391$ **s; …**

**P5.-** En la figura se muestra un cilindro hueco metálico muy largo de radio interior $R_1$ y exterior $R_2$, por el que circula una densidad de corriente $\vec{J} = Cr \cdot \hat{u}_z$. Además existe un campo eléctrico de la forma: $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t)\hat{u}_z$ para $0 \le r \le R_1$ y $\vec{E} = 0$ para $r > R_1$. Calcular:

**(a)** El campo magnético $\vec{B}$ en las tres regiones.

**(b)** Dibujar cualitativamente la gráfica de la amplitud del campo $B = B(r)$.



**Sol.:** **(a)** Zona 1: $B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mu_0 E_0 \omega r \cos(\omega t)$

Zona 2: $B = \frac{\mu_0 C r^2}{3} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 E_0 \omega R_1^2 \cos(\omega t)}{2r} - \frac{\mu_0 C R_1^3}{3r}$

Zona 3: $B = \frac{2\mu_0 C\left(R_2^3 - R_1^3\right) + 3\varepsilon_0 \mu_0 E_0 \omega R_1^2 \cos(\omega t)}{6r}$

**P6.-** Se considera un solenoide ideal muy largo de radio $R$ en el vacío con $n$ vueltas por unidad de longitud. Si circula por el solenoide una intensidad de corriente $I$ constante, se pide:

**(a)** A partir de las ecuaciones de Maxwell demostrar cuál es el valor del vector $\vec{B}$ en todos los puntos, tanto interiores como exteriores.

**(b)** Determinar el potenciar vector ( $A$ ) en dichos puntos

**Sol.:** **(a)** Dentro: $B_l = \mu_0 n I$

Fuera: $B_l = 0$

**(b)** Dentro: $A_t = \frac{\mu_0 n I r}{2}$

Fuera: $A_t = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r}$

**P7.-** Los campos eléctrico y magnético en el interior de un tubo metálico de sección cuadrada que se extiende entre $-L < x < L$ y $-L < y < L$ e indefinidamente a lo largo del eje $z$ vienen dados por las expresiones:

$$\vec{E} = A \cdot x \cdot \left(L^2 - y^2\right) \cdot \hat{u}_x \qquad\qquad \vec{B} = -2Axyt \cdot \hat{u}_z$$

Demostrar que este campo $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ verifica todas las ecuaciones y condiciones de contorno necesarias para ser un campo electromagnético.

**P8.-** Se tiene un condensador plano formado por dos discos. El campo eléctrico en su interior viene dado por:

$$\vec{E}(r,t) = E_0 \left[1 - \left(\frac{r}{\rho_0}\right)^2\right] \sin(\omega t) \cdot \hat{u}_z \quad \text{para } r < \rho_0$$

donde $\rho_0$ es el radio de los discos. Encontrar el campo magnético entre las placas del condensador.

**Sol.:** $\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0 \left[\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4\rho_0^2}\right] \cos(\omega t) \cdot \hat{u}_\phi$

**P9.-** Encontrar el vector de Poyting sobre la superficie de un alambre conductor recto, muy largo (de radio $b$ y conductividad $\sigma$) por el que circula una corriente continua $I$. Verificar el Teorema de Poyting.

**Sol.:** $\vec{S} = \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}(-\hat{u}_r)$

**P10.-** En una región del vacío libre de cargas y de corrientes, el campo eléctrico tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\cos(kz)\,\hat{u}_x$$

A partir de este campo, calcule:

(a) El campo magnético proveniente del campo $\vec{E}$.

(b) Relación entre $\omega$ y $k$ para que este campo sea debido exclusivamente a $\vec{D}$.

(c) La densidad de energía eléctrica.

(d) La densidad de energía magnética.

(e) La densidad de energía total.

(f) El promedio temporal de las cantidades anteriores.

(g) El vector de Poyting y su promedio.

¿A qué corresponde este campo eléctrico?

**Sol.:** **(a)** $\vec{B}(z,t)=\dfrac{E_0 k}{\omega}\sin(\omega t)\cdot\sin(kz)\cdot\hat{u}_y$

**(b)** $\omega = c\cdot k$

**(c)** $U_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t)\cdot\cos^2(kz)$

**(d)** $U_m=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\sin^2(\omega t)\cdot\sin^2(kz)$

**(e)** $U_{TOT}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cdot[1+\cos(2\omega t)\cdot\sin(2kz)]$

**(f)** $<U_e>=\dfrac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2\cdot\cos^2(kz)$ $\qquad$ $<U_m>=\dfrac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2\cdot\sin^2(kz)$

$$<U>=\frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2$$

**(f)** $<\tilde{S}>=0$

**P11.-** Dado $\vec{H}(x,z,t) = 2\cos(15\pi x)\, sen(6\pi 10^9 t-\beta z)\overrightarrow{a_y}\ \left({}^{A}/_{m}\right)$ en el aire, determinar el valor de E(x,z,t) y β.

**P12.-** En un cable coaxial con aire como dieléctrico que tiene un conductor interior de radio *a* y conductor externo de radio interior *b* existe una onda electromagnética de 60 MHz. Suponiendo que los conductores son perfectos y que la forma fasorial de la intensidad de campo eléctrico es:

$$\vec{E}=\frac{E_0}{r}e^{-jkz}\ \overrightarrow{a_r}\ \left({}^{V}/_{m}\right) \qquad a<r<b$$

a) Calcular k
b) Determinar H
c) Calcular las densidades superficiales de corriente en los conductores interior y exterior.

**P13.-** Dada una región del espacio con las siguientes características: $\mu = 3 \times 10^{-5}$ H/m, $\varepsilon = 1.2 \times 10^{-10}$ F/m y $\sigma = 0$ en cualquier otro lugar, y en la que **H** = 2 cos($10^{10}$

t - βx)$\mathbf{a_z}$ A/m, utilizar las ecuaciones de Maxwell para obtener expresiones para **B, D, E** y β.

Sol.: $B = 6 \cdot 10^{-5} \cos(10^{10}t - \beta x)\ \overrightarrow{a_z}\ \ T$

$D = \frac{2\beta}{10^{10}} \cos(10^{10}t - \beta x)\overrightarrow{a_y}\ \ C/m^2$

$E = \frac{D}{\varepsilon}$

$\beta = \pm 600\ rad/m$

**P14.-** Un coche circula a 120 km/h. Suponiendo que el campo magnético terrestre es de 4.3 X $10^{-5}$ Wb/$m^2$, encontrar el voltaje que se generará debido a la inducción EM en el parachoques del coche cuya longitud es de 1.6m. Asumir que el ángulo entre el campo magnético y la normal al coche es de 65°

Sol. V= 0.97mV

**P15.-** Comprobar cuáles de los siguientes campos, son realmente campos electromagnéticos. Suponer que los campos se encuentran en zonas libres de cargas.

| | |
|---|---|
| **(a) A**= 40 sen (ωt+10x) $\mathbf{a_z}$ | **Sol. Sí.** |
| **(b) B**=10/ρ cos(ωt-2ρ) $\mathbf{a_\phi}$ | **Sol. Sí** |
| **(c) C**= (3$\rho^2$ cot ϕ $\mathbf{a_\rho}$ + (cosϕ)/ρ $\mathbf{a_\phi}$) senωt | **Sol.: No** |
| **(d) D**= (1/r) senθ sen (ωt-5r) $\mathbf{a_\theta}$ | **Sol.: No** |

**P16.-** Obtener los fasores de los siguientes campos armónicos dependientes del tiempo:

(a) $\mathbf{E} = 4\cos(\omega t - 3x - 10°)\,\mathbf{a}_y - \sin(\omega t + 3x + 20°)\,\mathbf{a}_z$

(b) $\mathbf{H} = \frac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t - 5r)\mathbf{a}_\theta$

(c) $\mathbf{J} = 6e^{-3x}\sin(\omega t - 2x)\mathbf{a}_y + 10e^{-x}\cos(\omega t - 5x)\mathbf{a}_z$

Sol. (a) $E = 4e^{-j(3x+10º)}\overrightarrow{a_y} - 5e^{-j(3x-70º)}\overrightarrow{a_z}$

(b)$H = \frac{sen\theta}{r} e^{-j5r} \overrightarrow{a_\theta}$

(c)$J = -j6e^{-(3+2j)x} \overrightarrow{a_y} + 10e^{-(1+5j)x} \overrightarrow{a_z}$

**P17.-** Encontrar el correspondiente campo eléctrico E en función de β para una antena que radia en espacio libre el siguiente campo:

$$\mathbf{H} = \frac{12 \sin\theta}{r} \cos(2\pi \times 10^8 t - \beta r)\mathbf{a}_\theta \text{ mA/m}$$

Sol.:

$$E = -\frac{12sen\theta}{\omega\varepsilon_0 r}\beta sen(\omega t - \beta r)\, \overrightarrow{a_\varphi} \qquad \omega = 2\pi \cdot 10^8$$